数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 165-169

拡張実数値DC最適化問題のラグランジュ型双対性に対する制約想定の考察

島根大学大学院総合理工学研究科 村上卓見（**Takumi Murakami**）
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科 角田侑也（**Yuya Sumida**）
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（**Daishi Kuroiwa**）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 はじめに

本講究録では次のような DC 最適化問題に対する [9] における結果を紹介する:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\
 & \text{subject to} & f_i(x) - g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I,
\end{array}
$$

ただし, I は 0 を含まない任意の添え字集合とし $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i \in \{0\} \cup I)$ は閉真凸関数とする．I が有限集合である時のこの問題のラグランジュ型双対性に対する制約想定の先行研究としては Martínez-Legaz and Volle [3], Harada and Kuroiwa [7] などが挙げられる．これらの研究において, Harada and Kuroiwa [7] の結果は $f_i (i = 1, \ldots, m)$ が全て実数値関数の時に限り, Martínez-Legaz and Volle [3] の結果の拡張になっている．

本講究録では, Kuroiwa, Otani and Okano [8] が示した結果に注目し $0 \cdot (+\infty) = +\infty$ と定めることで, $f_i (i = 1, \ldots, m)$ が拡張実数値関数の場合においても Harada and Kuroiwa [7] と Martínez-Legaz and Volle [3] の結果の拡張となる, 問題 (P) に対するラグランジュ型双対定理を導き出した.

2 準備

まずは準備として, 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して, f のエピグラフと f の実行定義域をそれぞれ次のように定義する:

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, f(x) \leq r\},$$

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}.$$

f のエピグラフ $\mathrm{epi} f$ が凸集合, 閉集合, 非空のとき, f はそれぞれ凸関数, 閉関数, 真関数であるという．f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

と定義すると, f^* は常に閉凸関数であり, f が真凸関数ならば f^* は閉真凸関数であり, また f が閉真凸関数ならば $f = f^{**}$ であることが知られている. また明らかに $f(x)+f^*(y) \geq \langle y, x\rangle$ (the Young-Fenchel inequality) が成立する. 任意の $x \in \mathrm{dom} f$ に対して, f の x における劣微分を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

このとき, 次の同値関係が成立する:

$$f(x) + f^*(y) = \langle y, x\rangle \Leftrightarrow y \in \partial f(x).$$

また問題 (P) について, 制約集合を

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

とおき, $y_0, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ に対して, (P) の子問題を

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}(y_0, (y_i))) & \text{minimize} & f_0(x) - \langle x, y_0\rangle + g_0^*(y_0) \\ & \text{subject to} & f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i) \leqq 0, \forall i \in I. \end{array}$$

とおき, その制約集合を

$$S(y_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

とおく.

次に Martínez-Legaz and Volle [3] と Harada and Kuroiwa [7] の先行研究を紹介する。これらの先行研究では, 上記のように DC 最適化問題 (P) を凸最適化問題 $(\mathrm{P}(y_0, (y_i)))$ に分割することが本質である。

定理 2.1 (Martínez-Legaz Volle [3]) $I = \{1, \ldots m\}$, $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I \cup \{0\})$ を凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とし, g_i が S 上で劣微分可能, S 上で $g_0 = g_0^{**}$ と仮定する. 任意の $(x_1^*, \ldots, x_m^*) \in \prod_{1 \leq i \leq m} \{g_i^* - f_i^* \leq 0\}$ に対して $f_i(\bar{x}) - \langle \bar{x}, x_i^*\rangle + g_i^*(x_i^*) < 0$, $\forall i \in I$ をみたす $\bar{x} \in \mathrm{dom} f_0$ が存在するとき, 次の等式が成り立つ.

$$\inf_{x \in S}\{f_0(x) - g_0(x)\} = \inf_{x^* \in \mathrm{dom} g_0^*} \inf_{\substack{g_i^*(x_i^*) - f_i^*(x_i^*) \leq 0 \\ 1 \leq i \leq m}} \max_{\lambda \in R_+^m} \left\{ \begin{array}{c} g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^*(x_i^*) \\ -(f_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i)^*(x^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^*) \end{array} \right\}.$$

定理 2.2 (Martínez-Legaz Volle [3]) $I = \{1, \ldots, m\}$, $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I \cup \{0\})$ を凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$, $\Omega = \{(x_1^*, \ldots, x_m^*) \in (\mathbb{R}^n)^m \mid \partial g_1^*(x_1^*) \cap \cdots \cap \partial g_m^*(x_m^*) \neq \emptyset\}$ とし, g_i が S 上で劣微分可能, S 上で $g_0 = g_0^{**}$ と仮定する. 任意の $(x_1^*, \ldots, x_m^*) \in \Omega$ に対して $f_i(\bar{x}) - \langle barx, x_i^*\rangle + g_i^*(x_i^*) < 0$, $\forall i \in I$ をみたす $\bar{x} \in \mathrm{dom} f_0$ が存在するとき, 次の等式が成り立つ.

$$\inf_{x \in S}\{f_0(x) - g_0(x)\} = \inf_{(x^*, x_1^*, \ldots, x_m^*) \in \mathrm{dom} g_0^* \times \Omega} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ \begin{array}{c} g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^*(x_i^*) \\ -(f_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i)^*(x^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^*)\} \end{array} \right\}.$$

定理 2.3 (R. Harada, D. Kuroiwa, [7]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in \{0\} \cup I)$ を凸関数とし, $S \neq \emptyset$, $\bigcup_{x\in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0$, $\bigcup_{x\in S}(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x)) \subseteq D$ とする. 任意の $(y_1, \ldots, y_m) \in D \cap \prod_{i=1}^m \mathrm{dom} g_i^*$ に対して

- $S(y_1, \ldots, y_m) \neq \emptyset$,
- $\mathrm{cone\,co} \bigcup_{i=1}^{m} (\mathrm{epi} f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty)$ が閉集合

ならば, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{x\in S}(f_0(x) - g_0(x)) = \inf_{(y_0,\ldots,y_m)\in D_0\times D} \max_{\lambda_i \geqq 0} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) - \langle x, y_0\rangle + g_0^*(y_0) \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i)) \end{array} \right\}.$$

注意 2.1

- $f_i (i = 1, \ldots, m)$ が実数値関数の時, 定理 *2.3* は定理 *2.1* と定理 *2.2* の拡張になっている.
- $f_i (i = 1, \ldots, m)$ が拡張実数値関数の時は, 定理 *2.3* は定理 *2.1* と定理 *2.2* の拡張になっているとは限らない.

次に, 本講究録の主結果を導くために重要な役割を果たす Kuroiwa, Otani and Okano [8] の凸最適化問題に関する結果を紹介する。

lemma 2.1 (Kuroiwa, Otani and Okano [8]) $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数とし, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする. 任意の $i \in I$ に対して, g_i が連続になるような点が S に存在するとき, 次は同値である:

1. $\mathrm{cone\,co} \bigcup_{i\in I}(\mathrm{epi} g_i^* \cup \mathrm{epi} \delta_{\mathrm{dom} g_i}^*)$ は閉集合
2. $S \cap \mathrm{dom} f \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{epi} f^* + \mathrm{epi} \delta_S^*$ が閉集合となるような任意の閉真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して,

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\substack{I_0 \subseteq I \\ I_0:\text{finite} \\ \lambda\in\mathbb{R}_+^{I_0}}} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i\in I_0} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

ただし, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

lemma 2.2 (Kuroiwa, Otani and Okano [8]) $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数とし, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする. 任意の $i \in I$ に対して, g_i が連続になるような点が S に存在するとき, もし *Slater condition* が成り立つならば, つまり, 任意の $i \in I$ に対して, $g_i(x_0) < 0$ となるような $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在するならば,

$$\mathrm{cone\,co} \bigcup_{i\in I} (\mathrm{epi} g_i^* \cup \mathrm{epi} \delta_{\mathrm{dom} g_i}^*) \text{ は閉集合となる.}$$

3 主結果

定理 3.1 (Kuroiwa, Murakami, Sumida, [9]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in \{0\} \cup I)$ を閉真凸関数とし, $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0$, $\bigcup_{x \in S} \prod_{i \in I} \partial g_i(x) \subseteq D$ とする. 任意の $i \in I$ に対して, g_i が S で劣微分可能で, 任意の $(y_i) \in D \cap \prod_{i \in I} \mathrm{dom} g_i^*$ に対して,

- 任意の $j \in I$ に対して, f_j が $S(y_i)$ で連続,
- $S(y_i) \cap \mathrm{dom} f_0 \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{epi} f_0^* + \mathrm{epi}\delta^*_{S(y_i)}$ が閉集合,
- $\mathrm{cone}\,\mathrm{co} \bigcup_{i \in I}((\mathrm{epi} f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) \cup \mathrm{epi}\delta^*_{\mathrm{dom} f_i})$ が閉集合

ならば

$$\inf_{x \in S}\{f_0(x) - g_0(x)\} = \inf_{(y_0,(y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\substack{I_0 \subseteq I \\ I_0:\text{finite} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{I_0}}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) \\ + \displaystyle\sum_{i \in I_0} \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i)) \end{array} \right\}.$$

ただし, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

注意 3.1 任意の $(y_i) \in D \cap \prod_{i=1}^m \mathrm{dom} g_i^*$ と任意の $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して, f_j が $S(y_i)$ で連続となるような拡張実数値関数 $f_i (i = 1, \ldots, m)$ に対しては, 定理 *3.1* は定理 *2.1* と定理 *2.2* の拡張になっている.

注意 3.2 定理 *3.1* は定理 *2.3* の拡張になっている.

例 3.1 次のような制約関数を持つ *DC* 最適化問題を考える.

$$f_1(x) = \begin{cases} -x - 1 & x < 1, \\ 0 & x \in [-1, 1], \\ x - 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad g_1(x) = 0.$$

このとき, $f_1^*(x^*) = |x^*| + \delta_{[-1,1]}(x^*)$, $g_1^*(x^*) = \delta_{\{0\}}(x^*)$ となり, $\mathrm{cone}\,(\mathrm{epi} f_1^* \cup \mathrm{epi}^*_{\mathrm{dom} f_1})$ は閉集合となる. よって定理 *3.1* の仮定をみたすことがわかる. 一方で $0 \in \{g_1^* - f_1^* \leq 0\}$ かつ, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $f_1(x) - \langle x, 0 \rangle + g_1^*(0) = f_1(x) - \langle x, 0 \rangle + \delta^*_{\{0\}}(0) = f_1(x) \geq 0$ となることから, 定理 *2.1* と定理 *2.2* の仮定をみたさないことがわかる.

例 3.2 次のような制約関数を持つ *DC* 最適化問題を考える.

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 1], \\ +\infty & x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad \text{かつ} \quad g_1(x) = 0.$$

このとき, $f_1^*(y_1) = \|y_1\| + 1, g_1^*(y_1) = \delta_{\{0\}}(y_1), \mathrm{dom} f_1 = [-1, 1], \delta^*_{\mathrm{dom} f_1}(y_1) = \|y_1\|$ となり, $\mathrm{cone}\,(\mathrm{epi} f_1^* \cup \mathrm{epi}\delta^*_{\mathrm{dom} f_1})$ は閉集合となる. よって定理 *3.1* の仮定をみたすことがわかる. 一方で $\mathrm{cone}\,\mathrm{epi} f_1^* + \{0\} \times [0, +\infty)$ は閉集合とならないことから, 定理 *2.3* の仮定をみたさないことがわかる.

参考文献

[1] V. Jeyakumar, A.M.Rubinov, B.M.Glover, Y.Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 3, 900-919.

[2] B. Lemaire. Duality in reverse convex optimization. SIAM J. Optim. 8 (1998), no. 4, 1029-1037.

[3] J.-E. Martínez-Legaz, M. Volle.Duality in DC programming: the case of several DC consrtaints.J. Math. Anal. Appl., 237 (1999), pp. 657-671.

[4] M.A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. López.Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities Nonlinear Anal., 68 (2008), pp. 1184-1194.

[5] V. Jeyakumar,G.Y.Li.New dual constraint qualification characterizing zero duality gaps of convex programs and semidefinite programs.Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 12, e2239-e2249.

[6] Y. Fujiwara, D. Kuroiwa. Lagrange duality in canonical DC programming. J. Math. Anal. Appl. 408 (2013), no. 2, 476-483.

[7] R. Harada, D. Kuroiwa. Lagrange-type duality in DC programming. J. Math. Anal. Appl. 418 (2014), no. 1, 415-424.

[8] D. Kuroiwa, H. Otani, K. Okano. A necessary and sufficient constraint qualification for the Lagrange-duality including the Slater condition in extended real-valued convex optimization problems, preprint.

[9] D. Kuroiwa, T. Murakami, Y. Sumida. A constraint qualification for a Lagrange-type duality of extended real valued DC optimization problems, preprint